EJERCICIO 1

Comprobar que el siguiente conmutador es invariante Lorentz (espacio Minkowki 1+1)

$$\left[\boldsymbol{\phi}_{(\mathbf{0},\mathbf{0})}\ ;\boldsymbol{\phi}_{(\boldsymbol{t},\boldsymbol{x})}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{dk}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{k}}} \left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{ikx}} - \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{ikx}}\right)$$

Transformación de Lorentz

$X' = \Lambda X$; donde

$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix};\ \ y\ \ \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$

$\beta = v\ \ y\ \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Adoptando c = 1

$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$

$t = \gamma t' + \gamma\beta x'$

$x = \gamma\beta t' + \gamma x'$

Efecto Doppler relativista: ¿cómo se relacionan las frecuencias angulares y los números de onda de una señal para dos observadores inerciales?

Analicemos una onda sinusoidal. Si un observador en reposo mide un argumento (ω t – k x), otro inercial percibirá también una onda sinusoidal, pero medirá un argumento (ω´ t´ – k´ x´). Lo que es lo mismo que decir que $k_\mu k^\mu$ es invariante Lorentz.

$\omega t - |k|x = \omega(\gamma t' + \gamma\beta x') - |k|(\gamma\beta t' + \gamma x') = (\omega\gamma - |k|\gamma\beta)t' - (|k|\gamma - \omega\gamma\beta)x'$

$\omega' t' - |k'|x' = (\omega\gamma - |k|\gamma\beta)t' - (|k|\gamma - \omega\gamma\beta)x'$

$\omega' = \omega\gamma - |k|\gamma\beta$

$|k|' = |k|\gamma - \omega\gamma\beta$

$\begin{pmatrix} \omega' \\ |k|' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega \\ |k| \end{pmatrix} = \Lambda\begin{pmatrix} \omega \\ |k| \end{pmatrix}$

De donde sale que:

$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\omega}' + |\boldsymbol{k}|'\boldsymbol{\beta})$

$|\boldsymbol{k}| = \boldsymbol{\gamma}(|\boldsymbol{k}|' + \boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{\beta})$

$\omega^2 = |k|^2 + {m_0}^2$

Reemplazando los valores de ω y k:

$$\gamma^2(\omega' + |k|'\beta)^2 = \gamma^2(|k|' + \omega'\beta)^2 + {m_0}^2$$

$$\omega'^2\gamma^2 + 2\omega'|k|'\gamma\beta + |k|'^2\gamma^2\beta^2 = |k|'^2\gamma^2 + 2|k|'\omega'\gamma\beta + \omega'^2\gamma^2\beta^2 + {m_0}^2$$

$$\omega'^2\gamma^2 + |k|'^2\gamma^2\beta^2 = |k|'^2\gamma^2 + \omega'^2\gamma^2\beta^2 + {m_0}^2$$

$$\omega'^2\gamma^2(1-\beta^2) = |k|'^2\gamma^2(1-\beta^2) + {m_0}^2$$

$$\omega'^2 = |k|'^2 + {m_0}^2$$

El observador inercial percibe la misma relación de dispersión que el otro observador.

La fórmula puede expresarse como:

$$k'_\mu k'^\mu = {m_0}^2$$

(ver minuto 45:40 del capítulo 66 del curso de Javier: sólo sobreviven en la integral los cuadrimomentos que cumplen esta relación).

En resumen, queremos comprobar si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\frac{1}{2\omega_k}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) ¿=? \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi}\frac{1}{2\omega_{k'}}\left(e^{ik'x'} - e^{-ik'x'}\right)$$

Como $k_\mu k^\mu$ es invariante Lorentz esto implica que:

$$e^{ikx} = e^{ik'x'}$$

Y que para ello las frecuencias y números de onda deben cumplir que:

$$\omega = \gamma(\omega' + |k|'\beta)$$

$$|k| = \gamma(|k|' + \omega'\beta)$$

De donde obtuvimos:

$$\omega_{k'} = \sqrt{|k|'^2 + {m_0}^2}$$

Reemplazando dentro de la integral, faltaría tener en cuenta el determinante del Jacobiano de la transformación.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\frac{1}{2\omega_k}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi}|\det(\Lambda)|\frac{1}{2\omega_{k'}}\left(e^{ik'x'} - e^{-ik'x'}\right)$$

$$\det(\Lambda) = \det\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} = \gamma^2 - (\gamma\beta)^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = 1$$

Lo que implica que:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\frac{1}{2\omega_k}\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi}\frac{1}{2\omega_{k'}}\left(e^{ik'x'} - e^{-ik'x'}\right)}$$